УДК 517.5

Н. В. Дерев'янко (Ін–т математики НАН України, Київ)

ОЦІНКИ ЛІНІЙНИХ ПОПЕРЕЧНИКІВ КЛАСІВ H_p^Ω ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ У ПРОСТОРІ L_q

Obtained in the paper are the order estimates of linear widths of the classes H_p^Ω of periodic functions of many variables in the space L_q for $1 < p \le 2$, $p/(p-1) < q < \infty$ and $2 \le p < q < \infty$.

Отримано порядкові оцінки лінійних поперечників класів H_p^Ω періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q при $1 < p \le 2$, $p/(p-1) < q < \infty$ та $2 \le p < q < \infty$.

У роботі досліджується поведінка лінійних поперечників класів H_p^Ω в просторі L_q у випадках $1 < p \le 2$, $p/(p-1) < q < \infty$ і $2 \le p < q < \infty$. Детальніше про це мова буде йти пізніше, а спочатку наведемо основні позначення та означення.

Нехай $\mathbb{R}^d$, $d \ge 1$, — d-вимірний евклідів простір з елементами $\mathrm{x} = (x_1, ..., x_d)$, $\mathrm{y} = (y_1, ..., y_d)$, $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = x_1 y_1 + ... + x_d y_d$ і $L_p(\pi_d)$, $\pi_d = \prod_{j=1}^d [0, 2\pi]$, — простір 2π-періодичних за кожною змінною і сумовних у степені p, $1 \le p < \infty$ (відповідно суттєво обмежених при $p = \infty$), на кубі π_d функцій $f(\mathrm{x}) = f(x_1, ..., x_d)$, норма в якому визначається таким чином:

$$\|f\|_{L_p(\pi_d)} = \|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(\mathrm{x})|^p d\mathrm{x} \right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_{L_\infty(\pi_d)} = \|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathrm{x} \in \pi_d} |f(\mathrm{x})|.$$

В роботі будемо розглядати тільки ті функції $f \in L_p(\pi_d)$, для яких виконується умова

$$\int\limits_0^{2\pi} f(\mathrm{x}) dx_j = 0, \qquad j = \overline{1, d}.$$

Далі для зручностей позначень замість $L_p(\pi_d)$ будемо писати L_p.

Для $f \in L_p$ і $\mathrm{h}, \mathrm{x} \in \mathbb{R}^d$ означимо змішану різницю порядку $l \in \mathbb{N}$ за формулою

$$\Delta^l_{\mathrm{h}} f(\mathrm{x}) = \Delta^l_{h_d}(...(\Delta^l_{h_1} f(\mathrm{x}))...),$$

де

$$\Delta^l_{h_j} f(\mathrm{x}) = \sum_{n=0}^{l} (-1)^{l-n} C^n_l f(x_1, ..., x_{j-1}, x_j + nh_j, x_{j+1}, ..., x_d).$$

Позначимо

$$\mathbb{R}^d_+ = \{\mathrm{t} \in \mathbb{R}^d : \ t_j \geq 0, \ j = \overline{1, d}\}$$

і для $f \in L_p$ і $\mathrm{t} \in \mathbb{R}^d_+$ означимо змішаний модуль неперервності порядку $l \in \mathbb{N}$ згідно з формулою

$$\Omega_l(f, \mathrm{t})_p = \sup_{|h_j| \leq t_j, j=\overline{1,d}} \|\Delta^l_{\mathrm{h}} f(\cdot)\|_p.$$

Нехай $\Omega(\mathrm{t}) = \Omega(t_1, ..., t_d)$ — функція типу змішаного модуля неперервності порядку l, тобто функція визначена на $\mathbb{R}^d_+$, що задовольняє такі умови:

1) $\Omega(\mathrm{t}) > 0$, $t_j > 0$, $j = \overline{1, d}$ і $\Omega(\mathrm{t}) = 0$, якщо $\prod\limits_{j=1}^{d} t_j = 0$;

2) $\Omega(\mathrm{t})$ не спадає по кожній змінній $t_j \geq 0$, $j = \overline{1, d}$, при довільних фіксованих значеннях інших змінних t_i, $i \neq j$;

3) $\Omega(m_1 t_1, ..., m_d t_d) \leq \left(\prod\limits_{j=1}^{d} m_j \right)^l \Omega(\mathrm{t})$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$;

4) $\Omega(\mathrm{t})$ неперервна при $t_j \geq 0$, $j = \overline{1, d}$.

Множину таких функцій Ω позначимо через Ψ_l.

Для заданої функції $\Omega \in \Psi_l$ означимо клас функцій H^Ω_p, $1 \leq p \leq \infty$, наступним чином [1]:

$$H^\Omega_p = \{f \in L_p : \ \Omega_l(f, \mathrm{t})_p \leq C_1 \Omega(\mathrm{t}), \ C_1 > 0\}.$$

Зауважимо, що у випадку коли $\mathrm{r} = (r_1, ..., r_d)$, $0 < r_j < l$, $j = \overline{1, d}$, і $\Omega(\mathrm{t}) = \prod_{j=1}^{d} t_j^{r_j}$ класи H^Ω_p співпадають з відомими аналогами класів Нікольського H^{r}_p [2].

Також будемо вважати, що Ω належить до множин S^{α} і S_l.

Будемо говорити, що функція однієї змінної φ належить до множини S^{α}, $\alpha > 0$, якщо функція $\varphi(\tau)/\tau^{\alpha}$ майже зростає, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_2 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^{\alpha}} \leq C_2 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^{\alpha}} \ , \qquad 0 < \tau_1 \leq \tau_2.$$

Функція φ належить до множини S_l, якщо існує γ, $0 < \gamma < l$, таке що функція $\varphi(\tau)/\tau^{\gamma}$ майже спадає, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_3 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^{\gamma}} \geq C_3 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^{\gamma}} \ , \qquad 0 < \tau_1 \leq \tau_2.$$

Умови належності функції φ до множин S^{α} і S_l називають умовами Барі-Стєчкіна [3].

Будемо вважати, що $\Omega \in S^{\alpha}$ $(\Omega \in S_l)$ якщо $\Omega(t_1, ..., t_d)$ як функція змінної t_j, $j = \overline{1, d}$, при довільних фіксованих значеннях інших змінних t_i, $i \neq j$, належить до множини S^{α} (відповідно до множини S_l).

Позначимо $\Phi_{\alpha,l} = \Psi_l \cap S^{\alpha} \cap S_l$.

У роботі будемо розглядати класи H_p^{Ω} з функцією Ω спеціального вигляду. Нехай ω — задана функція однієї змінної типу модуля неперервності порядку l, яка належить до множин S^{α} та S_l. Покладемо

$$\Omega(\mathrm{t}) = \omega\biggl(\prod_{j=1}^{d} t_j\biggr), \quad \mathrm{t} \in \mathbb{R}_+^d.$$

Зрозуміло, що таким чином задана функція Ω буде належати до множини $\Phi_{\alpha,l}$.

Надалі будемо вважати, що для двох невід'ємних величин A і B запис $A \asymp B$ означає, що існують константи C_4, $C_5 > 0$ такі, що $C_4 A \leq B \leq C_5 A$. Записи $A \ll B$ або $A \gg B$, означають, що $C_6 A \leq B$ і $B \leq C_7 A$, $C_6, C_7 > 0$, відповідно. Всі константи C_i , $i = 1, 2, ...$, які будуть зустрічатися у роботі, можуть залежати лише від тих параметрів, що входять в означення класу, метрики, в якій оцінюється похибка наближення, та розмірності простору $\mathbb{R}^d$. Через $|\mathcal{N}|$ будемо позначати кількість елементів множини $\mathcal{N}$.

Для $\mathrm{s} \in \mathbb{N}^d$ через $\rho(\mathrm{s})$ позначимо підмножину цілочислової решітки $\mathbb{Z}^d$ вигляду

$$\rho(\mathrm{s}) = \{\mathrm{k} \in \mathbb{Z}^d : \ 2^{s_j-1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, \ j = \overline{1,d}\}.$$

Покладемо для $f \in L_1$

$$\delta_{\mathrm{s}}(f, \mathrm{x}) = \sum_{\mathrm{k} \in \rho(s)} \widehat{f}(\mathrm{k}) e^{i(\mathrm{k},\mathrm{x})},$$

де $\widehat{f}(\mathrm{k}) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(\mathrm{t}) e^{-i(\mathrm{k},\mathrm{t})} d\mathrm{t}$ — коефіцієнти Фур'є функції f.

Позначимо через $V_m(t)$, $m \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$, ядро Валле Пуссена

$$V_m(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{m} \cos kt + 2\sum_{k=m+1}^{2m-1} \left(\frac{2m-k}{m}\right) \cos kt \ ,$$

і для функції $f \in L_p$ і вектора $\mathrm{s} \in \mathbb{N}^d$ розглянемо оператор виду

$$A_{\mathrm{s}}(f) = f * \prod_{j=1}^{d} (V_{2^{s_j}} - V_{2^{s_j-1}}),$$

де " $*$ " — операція згортки.

У роботі [1] доведено таку теорему про належність функції до класу H_p^Ω.

Теорема А. *Нехай* $\Omega(\mathrm{t}) = \omega(\prod_{j=1}^d t_j)$, *де* $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > 0$, $l \in \mathbb{N}$. *Тоді* f *належить класу* H_p^Ω *в тому і тільки в тому випадку, коли виконуються порядкові нерівності.*

$$\|\delta_{\mathrm{s}}(f)\|_p \ll \omega(2^{-(\mathrm{s},1)}), \quad 1 < p < \infty, \tag{1}$$

$$\|A_{\mathrm{s}}(f)\|_p \ll \omega(2^{-(\mathrm{s},1)}), \quad 1 \leq p \leq \infty, \tag{2}$$

де $(\mathrm{s}, 1) = s_1 + ... + s_d$.

Перейдемо тепер до означення досліджуваної апроксимативної характеристики.

Нехай W — центрально-симетрична множина в банаховому просторі X, $\mathrm{Lin}_m(X)$ — множина всіх лінійних підпросторів простору X, розмірність яких не більша ніж m, $\mathcal{L}(X, X_m)$ — множина лінійних операторів, які відображають весь простір X у його підпростір $X_m \in \mathrm{Lin}_m(X)$. Тоді лінійний поперечник множини W в просторі X означається згідно з формулою

$$\lambda_m(W, X) = \inf_{X_m \in \mathrm{Lin}_m(X)} \inf_{A \in \mathcal{L}(X, X_m)} \sup_{x \in W} \|x - Ax\|_X.$$

Поняття лінійного поперечник було введене В.М. Тихомировим у 1960 р. [4]. Дослідженням лінійних поперечників для класів функцій однієї змінної займалися Р.С. Ісмагілов [5], В.Е. Майоров [6, 7], В.М. Тихомиров (див., наприклад, [8]), М.П. Корнейчук (див., наприклад, [9]). З історією дослідження лінійних поперечників тих або інших класів функцій багатьох змінних можна ознайомитися в роботах Е.М. Галеєва [10, 11] та А.С. Романюка [12–14] (див., також, монографію [15]), в яких також міститься детальна бібліографія.

При одержанні оцінок знизу лінійних поперечників класів H_p^{Ω} будемо користуватися відомими оцінками колмогоровських поперечників дискретних множин. Нагадаємо, що колмогоровським поперечником центрально-симетричної множини W банахового простору X називається величина [16]

$$d_m(W, X) = \inf_{X_m \in \mathrm{Lin}_m(X)} \sup_{x \in W} \inf_{u \in X_m} \|x - u\|_X.$$

Легко бачити, що згідно з означеннями лінійного і колмогоровського поперечників має місце нерівність

$$d_m(W, X) \leq \lambda_m(W, X). \tag{3}$$

Перед формулюванням основних результатів наведемо твердження, які будемо використовувати при їх доведенні.

Нехай l_p^n означає простір всеможливих упорядкованих систем з n дійсних чисел, норма в якому означається таким чином

$$\|\mathrm{x}\|_{l_p^n} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty, \\ \max\limits_{1 \leq j \leq n} |x_j|, & p = \infty, \end{cases}$$

і $B_p^n=\{\mathrm{x}:\|\mathrm{x}\|_{l_p^n}\le 1\}$ — одинична куля в цьому просторі.

Теорема Б [17]. *Нехай* $m<n,\ 1\le p<2\le q<\infty,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}\ge 1.$ *Тоді*

$$\lambda_m(B_p^n,\ l_q^n)\asymp \max\left\{n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}},\min\{1,\ n^{\frac{1}{q}}m^{-\frac{1}{2}}\}\sqrt{1-\frac{m}{n}}\right\}.$$

Зауважимо, що у випадку $p=1$, $q>2$ відповідний до теореми Б результат випливає із твердження про колмогоровський поперечник октаедра B_1^n в просторі l_q^n, встановленого Б.С. Кашиним [18].

Через $\mathcal{T}(\rho(\mathrm{s}))$ позначимо множину функцій f вигляду

$$f(\mathrm{x})=\sum_{\mathrm{k}\in\rho(\mathrm{s})} c_{\mathrm{k}}e^{i(\mathrm{k},\mathrm{x})},$$

де c_{k} — довільні числа.

Теорема В [19]. *Між простором тригонометричних поліномів* $\mathcal{T}(\rho(\mathrm{s}))$ *і простором* $\mathbb{R}^{2^{(s,1)}}$ *існує ізоморфізм, який ставить у відповідність функції* $f\in\mathcal{T}(\rho(\mathrm{s}))$ *вектор* $\delta_{\mathrm{s}}f^j=\{f_{\mathrm{n}}(\tau_j)\}\in\mathbb{R}^{2^{(\mathrm{s},1)}}$

$$f_{\mathrm{n}}(\mathrm{t})=\sum_{\mathrm{sign}k_l=n_l} c_{\mathrm{k}}e^{i(\mathrm{k},\mathrm{t})},\quad l=\overline{1,d},\ \mathrm{n}=(\pm1,...,\pm1)\in\mathbb{R}^d,$$

$$\tau_j=(\pi 2^{2-s_1}j_1,...,\pi 2^{2-s_d}j_d),\quad j_i=1,2,...,2^{s_i-1},\ i=\overline{1,d},$$

і при цьому має місце співвідношення

$$\|f(\cdot)\|_p\asymp 2^{-(\mathrm{s},1)/p}\|\delta_{\mathrm{s}}f^j\|_{l_p^{2^{(\mathrm{s},1)}}},\quad p\in(1,\infty).$$

При $d=1$ теорема В є відомою теоремою Марцинкевича-Зигмунда про дискретизацію [20, с. 46].

Теорема Г (Літтлвуда-Пелі) [21]. *Нехай* $f\in L_p,\ 1<p<\infty.$ *Тоді існують додатні сталі* C_8 *і* C_9 *такі, що*

$$C_8\|f\|_p\le\left\|\left(\sum_{\mathrm{s}}|\delta_{\mathrm{s}}(f,\cdot)|^2\right)^{1/2}\right\|_p\le C_9\|f\|_p.$$

Як наслідок з означення лінійного поперечника, теореми В і теореми Літтлвуда-Пелі у роботі [10] отримано наступне твердження.

Лема А. *Нехай* $\mathrm{s} \in \mathbb{N}^d$ *і* $f \in \mathcal{T}(\rho(\mathrm{s}))$, $m_{\mathrm{s}} \in \mathbb{Z}_+$, $m_{\mathrm{s}} \le 2^{(\mathrm{s},1)}$. *Якщо* $1 < p, q < \infty$, *то існує лінійний оператор* $\Lambda_{m_{\mathrm{s}}} : \mathcal{T}(\rho(\mathrm{s})) \to \mathcal{T}(\rho(\mathrm{s}))$, *розмірність області значень якого не перевищує* m_{s}, *і такий, що*

$$\|f - \Lambda_{m_{\mathrm{s}}} f\|_q \asymp \lambda_{m_{\mathrm{s}}}(B_p^{2^{(\mathrm{s},1)}}, l_q^{2^{(\mathrm{s},1)}}) 2^{(\mathrm{s},1)(1/p-1/q)} \|f\|_p.$$

Лема Б [22, с.25]. *Нехай* $1 \le p < q < \infty$ *і* $f \in L_p$. *Тоді має місце співвідношення*

$$\|f\|_q^q \ll \sum_{\mathrm{s}} \left(\|\delta_{\mathrm{s}}(f,\cdot)\|_p 2^{(\mathrm{s},1)(1/p-1/q)} \right)^q.$$

Лема В [10]. *Нехай* $1 < q < \infty$, $q_1 = \max\{q, 2\}$, $q_2 = \min\{q, 2\}$. *Тоді*

$$\left(\sum_{\mathrm{s}} \|\delta_{\mathrm{s}}(f,\cdot)\|_q^{q_1} \right)^{1/q_1} \ll \left\| \sum_{\mathrm{s}} \delta_{\mathrm{s}}(f,\cdot) \right\|_q \ll \left(\sum_{\mathrm{s}} \|\delta_{\mathrm{s}}(f,\cdot)\|_q^{q_2} \right)^{1/q_2}.$$

Теорема Д [2]. *Нехай* $n_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$, *і*

$$t(\mathrm{x}) = \sum_{|k_j| \le n_j} c_{\mathrm{k}} e^{i(\mathrm{k},\mathrm{x})}.$$

Тоді при $1 \le q < p \le \infty$ *виконується нерівність*

$$\|t\|_p \le 2^d \prod_{j=1}^{d} n_j^{1/q-1/p} \|t\|_q. \tag{4}$$

Нерівність (4) доведена С.М. Нікольським і має назву "нерівність різних метрик". У випадку $d = 1$ і $p = \infty$ відповідну нерівність довів Джексон [23].

Нехай знову X — банаховий простір і A — деяка підмножина цього простору. Полярою множини $A \subset X$ будемо називати наступну множину у спряженому просторі X^*:

$$A^\circ = \{x^* \in X^* : |\langle x, x^* \rangle| \le 1 \ \forall x \in X\},$$

де $\langle x, x^* \rangle$ — значення лінійного функціоналу x^* на елементі x.

Теорема E [5]. *Нехай BX і BY — одиничні кулі в банахових просторах X і Y відповідно, $(BX)^\circ$, $(BY)^\circ$ — поляри цих множин, а простір Y^* вкладений в простір X. Тоді*

$$\lambda_m((BY)^\circ, X) = \lambda_m((BX)^\circ, Y).$$

Зауважимо, що якщо X — нормований простір (не банаховий), то означення поляри і теорема E мають дещо інший вигляд. Більш детально з цими питаннями можна ознайомитися у роботах [5] і [24].

Через $l_{p,q}^{n,m}$, $1 \le p, q \le \infty$, $n, m \in \mathbb{N}$, будемо позначати нормований простір елементів з простору $\mathbb{R}^{nm}$, норма в якому означається наступним чином

$$\|\mathrm{x}\|_{l_{p,q}^{n,m}} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{s=1}^{m} \left(\sum\limits_{k \in \Delta_s} |x_k|^p \right)^{q/p} \right)^{1/q}, & 1 \le p, q < \infty, \\ \max\limits_{1 \le s \le m} \left(\sum\limits_{k \in \Delta_s} |x_k|^p \right)^{1/p}, & q = \infty, \end{cases}$$

де $\Delta_s = \{k \in \mathbb{N} : (s-1)n < k \le sn\}$, $s = \overline{1, m}$. Відповідно, $B_{p,q}^{n,m} = \{\mathrm{x} : \|\mathrm{x}\|_{l_{p,q}^{n,m}} \le 1\}$ — одинична куля в просторі $l_{p,q}^{n,m}$. Зауважимо, що $\|\cdot\|_{l_{p,p}^{n,m}} \equiv \|\cdot\|_{l_p^{nm}}$, $1 \le p \le \infty$.

Теорема Ж [25]. *Нехай $N \le mn/2$. Тоді існує додатна стала C_{10} така, що справедливі нерівності*

$$C_{10} m \frac{\sqrt{\log \log m}}{\log m} \le d_N(B_{1,\infty}^{n,m}, l_{2,1}^{n,m}) \le m.$$

Тут і далі під log будемо розуміти логарифм за основою 2.

Сформулюємо і доведемо основні результати.

Теорема 1. *Нехай $1 < p \le 2$, $p' < q < \infty$, де $1/p + 1/p' = 1$, а функція $\Omega(\mathrm{t}) = \omega(\prod_{j=1}^{d} t_j)$, де $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > 1 - 1/q$, $l \in \mathbb{N}$. Тоді має місце порядкове співвідношення*

$$\frac{\sqrt{\log \log m}}{\log m} \omega(2^{-m}) 2^{m(1/2 - 1/q)} m^{\frac{d-1}{q}} \ll \lambda_M(H_p^\Omega, L_q) \ll$$

$$\ll \omega(2^{-m}) 2^{m(1/2 - 1/q)} m^{\frac{d-1}{q}}, \tag{5}$$

де $M \asymp 2^m m^{d-1}$.

Доведення. Встановимо спочатку оцінку зверху. Задамо $M \in \mathbb{N}$ і підберемо $m \in \mathbb{N}$ так, щоб виконувалася умова $2^m m^{d-1} \asymp M$.

Для $\mathrm{s} \in \mathbb{N}^d$ покладемо

$$m_{\mathrm{s}} = \begin{cases} 2^{(\mathrm{s},1)}, & (\mathrm{s},1) \le m, \\ [2^{m+\theta(m-(\mathrm{s},1))}], & (\mathrm{s},1) > m, \end{cases}$$

де $\theta > 0$ — довільне достатньо мале число, значення якого ми уточнимо пізніше.

Покажемо, що $\sum\limits_{\mathrm{s}\in\mathbb{N}^d} m_{\mathrm{s}} \ll M$. Справді

$$\sum_{\mathrm{s}\in\mathbb{N}^d} m_{\mathrm{s}} \le \sum_{(\mathrm{s},1)\le m} 2^{(\mathrm{s},1)} + \sum_{(\mathrm{s},1)>m} 2^{m+\theta(m-(\mathrm{s},1))} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{(\mathrm{s},1)=j} 2^{(\mathrm{s},1)} + 2^{m+\theta m} \sum_{j>m} \sum_{(\mathrm{s},1)=j} 2^{-\theta(\mathrm{s},1)} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} 2^j \sum_{(\mathrm{s},1)=j} 1 + 2^{m+\theta m} \sum_{j>m} 2^{-\theta j} \sum_{(\mathrm{s},1)=j} 1. \tag{6}$$

Враховуючи, те що

$$\sum_{(\mathrm{s},1)=j} 1 \asymp j^{d-1}, \tag{7}$$

з (6) отримаємо

$$\sum_{\mathrm{s}\in\mathbb{N}^d} m_{\mathrm{s}} \ll \sum_{j=1}^{m} 2^j j^{d-1} + 2^{m+\theta m} \sum_{j>m} 2^{-\theta j} j^{d-1} \ll$$

$$\ll 2^m m^{d-1} + 2^{m+\theta m} 2^{-\theta m} m^{d-1} \asymp 2^m m^{d-1} \asymp M.$$

Через Λ_M позначимо лінійний оператор рангу M, який діє на $f \in H_p^{\Omega}$ за формулою

$$\Lambda_M f = \sum_{\mathrm{s}} \Lambda_{m_{\mathrm{s}}} \delta_{\mathrm{s}}(f),$$

де оператори $\Lambda_{m_{\rm s}}$ визначені згідно з лемою А.

Оцінимо далі норму $\|f-\Lambda_M f\|_q$. Оскільки за умовою $p'<q$, то згідно з лемою Б будемо мати

$$\|f-\Lambda_M f\|_q \ll$$

$$\ll \Bigg(\sum_{({\rm s},1)>m} \Big(\|\delta_{\rm s}(f)-\Lambda_{m_{\rm s}}\delta_{\rm s}(f)\|_{p'} 2^{({\rm s},1)(1/p'-1/q)} \Big)^q \Bigg)^{1/q}. \qquad (8)$$

Послідовно застосувавши до правої частини (8) лему А і співвідношення (1), отримаємо

$$\|f-\Lambda_M f\|_q \ll$$

$$\ll \Bigg(\sum_{({\rm s},1)>m} \Big(2^{({\rm s},1)(1/p-1/q)} \|\delta_{\rm s}(f)\|_p \lambda_{m_s}(B_p^{2^{({\rm s},1)}}, l_{p'}^{2^{({\rm s},1)}}) \Big)^q \Bigg)^{1/q} \ll$$

$$\ll \Bigg(\sum_{({\rm s},1)>m} \Big(2^{({\rm s},1)(1/p-1/q)} \omega(2^{-({\rm s},1)}) \lambda_{m_s}(B_p^{2^{({\rm s},1)}}, l_{p'}^{2^{({\rm s},1)}}) \Big)^q \Bigg)^{1/q} = \mathcal{J}_1.$$

Врахувавши, що згідно з теоремою Б при $m_s < 2^{({\rm s},1)}$ має місце співвідношення

$$\lambda_{m_s}(B_p^{2^{({\rm s},1)}}, l_{p'}^{2^{({\rm s},1)}}) \asymp$$

$$\asymp \max\left\{ 2^{({\rm s},1)(1/p'-1/p)}, \min\{1, 2^{({\rm s},1)/p'} m_{\rm s}^{-1/2}\} \sqrt{1-\frac{m_{\rm s}}{2^{({\rm s},1)}}} \right\} \le$$

$$\le \max\{2^{({\rm s},1)(1/p'-1/p)}, 2^{({\rm s},1)/p'} m_{\rm s}^{-1/2} \sqrt{1-\frac{m_{\rm s}}{2^{({\rm s},1)}}}\} \ll 2^{({\rm s},1)/p'} m_{\rm s}^{-1/2},$$

продовжимо оцінку величини $\mathcal{J}_1$ таким чином:

$$\mathcal{J}_1 \ll \Bigg(\sum_{({\rm s},1)>m} \Big(2^{({\rm s},1)(1/p-1/q)} \omega(2^{-({\rm s},1)}) 2^{({\rm s},1)/p'} m_{\rm s}^{-1/2} \Big)^q \Bigg)^{1/q} =$$

$$= \Bigg(\sum_{({\rm s},1)>m} \Big(2^{({\rm s},1)(1-1/q)} \omega(2^{-({\rm s},1)}) m_{\rm s}^{-1/2} \Big)^q \Bigg)^{1/q} = \mathcal{J}_2.$$

Підставивши в $\mathcal{J}_2$ замість m_{s} їх значення, будемо мати

$$\mathcal{J}_2 \leq \Bigg(\sum_{(\mathrm{s},1)>m} \Big(2^{(\mathrm{s},1)(1-1/q)} \omega(2^{-(\mathrm{s},1)}) 2^{-m/2-\theta/2(m-(\mathrm{s},1))} \Big)^q \Bigg)^{1/q} =$$

$$= 2^{-m/2} 2^{-\theta m/2} \Bigg(\sum_{(\mathrm{s},1)>m} \Big(2^{(\mathrm{s},1)(1-1/q+\theta/2-\alpha)} \frac{\omega(2^{-(\mathrm{s},1)})}{2^{-(\mathrm{s},1)\alpha}} \Big)^q \Bigg)^{1/q} = \mathcal{J}_3.$$

Оскільки $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > 1 - 1/q$, то при $(\mathrm{s},1) > m$ буде виконуватись порядкова нерівність

$$\frac{\omega(2^{-(\mathrm{s},1)})}{2^{-(\mathrm{s},1)\alpha}} \ll \frac{\omega(2^{-m})}{2^{-m\alpha}}.$$

Врахувавши останнє співвідношення, отримаємо

$$\mathcal{J}_3 \ll 2^{-m/2} 2^{-\theta m/2} \frac{\omega(2^{-m})}{2^{-m\alpha}} \Bigg(\sum_{(\mathrm{s},1)>m} \Big(2^{(\mathrm{s},1)(1-1/q+\theta/2-\alpha)} \Big)^q \Bigg)^{1/q} =$$

$$= 2^{-m/2} 2^{-\theta m/2} \frac{\omega(2^{-m})}{2^{-m\alpha}} \Bigg(\sum_{j>m} \sum_{(\mathrm{s},1)=j} \Big(2^{(\mathrm{s},1)(1-1/q+\theta/2-\alpha)} \Big)^q \Bigg)^{1/q} =$$

$$= 2^{-m/2} 2^{-\theta m/2} \frac{\omega(2^{-m})}{2^{-m\alpha}} \Bigg(\sum_{j>m} 2^{jq(1-1/q+\theta/2-\alpha)} \sum_{(\mathrm{s},1)=j} 1 \Bigg)^{1/q}.$$

З огляду на порядкове співвідношення (7), будемо мати

$$\mathcal{J}_3 \ll 2^{-m/2} 2^{-\theta m/2} \frac{\omega(2^{-m})}{2^{-m\alpha}} \Bigg(\sum_{j>m} 2^{jq(1-1/q+\theta/2-\alpha)} j^{d-1} \Bigg)^{1/q}.$$

Далі, підібравши $\theta > 0$ з умови $\theta/2 < \alpha + 1/q - 1$ (це завжди можливо зробити, тому що $\alpha > 1 - 1/q$), завершуємо оцінку норми

$$\|f - \Lambda_M f\|_q \ll 2^{-m/2} 2^{-\theta m/2} \frac{\omega(2^{-m})}{2^{-m\alpha}} 2^{m(1-1/q+\theta/2-\alpha)} m^{\frac{d-1}{q}} =$$

$$= \omega(2^{-m}) 2^{m(1/2-1/q)} m^{\frac{d-1}{q}},$$

де $M \asymp 2^m m^{d-1}$.

А звідси, внаслідок означення лінійного поперечника, отримаємо оцінку зверху в (5).

Перейдемо тепер до встановлення оцінки знизу. Для $M \in \mathbb{N}$ виберемо число $m \in \mathbb{N}$ таким чином, щоб виконувалося співвідношення $2^m m^{d-1} \asymp M$ і кількість елементів множини $Q_m = \bigcup\limits_{\mathrm{s} \in S} \rho(\mathrm{s})$, де $S = \{\mathrm{s} \in \mathbb{N}^d : (\mathrm{s}, 1) = m\}$, була не менша ніж $2M$.

Позначимо через $\mathcal{T}_m$ множину тригонометричних поліномів з номерами гармонік з Q_m і нехай P_m оператор ортогонального проектування на цю множину. Тоді згідно з означенням лінійного поперечника

$$\lambda_M(H_p^\Omega, L_q) \geq \lambda_M(H_p^\Omega \cap \mathcal{T}_m, L_q). \tag{9}$$

З іншого боку, для $t \in \mathcal{T}_m$

$$\|f - t\|_q \geq \|P_m(f - t)\|_q = \|P_m f - t\|_q. \tag{10}$$

Врахувавши (9) і (10), отримаємо

$$\lambda_M(H_p^\Omega, L_q) \geq \lambda_M(H_p^\Omega \cap \mathcal{T}_m, L_q \cap \mathcal{T}_m). \tag{11}$$

Зауважимо, що з теореми А отримаємо наступне: $f \in H_p^\Omega$ тоді і тільки тоді, коли виконується співвідношення

$$\sup_{\mathrm{s}} \omega^{-1}(2^{-(\mathrm{s},1)}) \|\delta_{\mathrm{s}}(f)\|_p \ll 1. \tag{12}$$

Візьмемо $f \in H_p^\Omega \cap \mathcal{T}_m$. Згідно з теоремою В, будемо мати

$$\begin{aligned} &\sup_{\mathrm{s} \in S} \omega^{-1}(2^{-(\mathrm{s},1)}) \|\delta_{\mathrm{s}}(f)\|_p \asymp \\ &\asymp \sup_{\mathrm{s} \in S} \omega^{-1}(2^{-(\mathrm{s},1)}) 2^{-(\mathrm{s},1)/p} \|\delta_{\mathrm{s}} f^j\|_{l_p^{2^{(\mathrm{s},1)}}} = \\ &= \omega^{-1}(2^{-m}) 2^{-m/p} \sup_{\mathrm{s} \in S} \|\delta_{\mathrm{s}} f^j\|_{l_p^{2^{(\mathrm{s},1)}}}. \end{aligned} \tag{13}$$

Отже, згідно з (12) і (13) $f \in H_p^\Omega \cap \mathcal{T}_m$ тоді і тільки тоді коли

$$\sup_{\mathrm{s} \in S} \|\delta_{\mathrm{s}} f^j\|_{l_p^{2^{(\mathrm{s},1)}}} \ll \omega(2^{-m}) 2^{m/p}. \tag{14}$$

З іншої сторони для $g \in L_q \cap \mathcal{T}_m$, $q \geq 2$, на основі леми B і теореми B, будемо мати

$$\|g\|_q = \left\| \sum_{\mathrm{s}\in S} \delta_{\mathrm{s}}(g) \right\|_q \gg \left(\sum_{\mathrm{s}\in S} \|\delta_{\mathrm{s}}(g)\|_q^q \right)^{1/q} \asymp$$

$$\asymp \left(\sum_{\mathrm{s}\in S} \left(2^{-(\mathrm{s},1)/q} \|\delta_{\mathrm{s}} g^j\|_{l_q^{2^{(\mathrm{s},1)}}} \right)^q \right)^{1/q} =$$

$$= 2^{-m/q} \left(\sum_{\mathrm{s}\in S} \left(\|\delta_{\mathrm{s}} g^j\|_{l_q^{2^{(\mathrm{s},1)}}} \right)^q \right)^{1/q}. \tag{15}$$

Таким чином, врахувавши (11), (14) і (15), отримаємо

$$\lambda_M(H_p^\Omega, L_q) \gg \omega(2^{-m}) 2^{m(1/p-1/q)} \lambda_M(B_{p,\infty}^{2^m,|S|}, l_q^{2^m|S|}). \tag{16}$$

Далі нам знадобляться деякі співвідношення. З нерівності про середнє степеневе отримуємо

$$\|\cdot\|_{l_p^{2^m}} \leq \|\cdot\|_{l_2^{2^m}} 2^{m(1/p-1/2)}, \quad p \leq 2.$$

Звідси при $p \leq 2$ має місце вкладення

$$B_p^{2^m} \supset 2^{m(1/2-1/p)} B_2^{2^m},$$

а, отже, і вкладення

$$B_{p,\infty}^{2^m,|S|} \supset 2^{m(1/2-1/p)} B_{2,\infty}^{2^m,|S|}. \tag{17}$$

З іншого боку, знову ж таки за нерівністю про середнє степеневе, будемо мати

$$\|\cdot\|_{l_q^{|S|}} \geq \|\cdot\|_{l_1^{|S|}} |S|^{1/q-1}, \quad q \geq 1.$$

Врахувавши також, що при $q \leq \infty$

$$\|\cdot\|_{l_q^{2^m}} \geq \|\cdot\|_{l_\infty^{2^m}},$$

отримаємо

$$\|\cdot\|_{l_q^{2^m|S|}} \geq \|\cdot\|_{l_{\infty,1}^{2^m,|S|}} |S|^{1/q-1}. \tag{18}$$

Прийнявши до уваги відомі співвідношення

$$\left(l_{2,1}^{2^m,|S|}\right)^* = l_{2,\infty}^{2^m,|S|}, \quad \left(l_{\infty,1}^{2^m,|S|}\right)^* \supseteq l_{1,\infty}^{2^m,|S|}, \tag{19}$$

згідно з означенням поляри множини будемо мати

$$\left(B_{2,1}^{2^m,|S|}\right)^\circ = B_{2,\infty}^{2^m,|S|}, \quad \left(B_{\infty,1}^{2^m,|S|}\right)^\circ \supseteq B_{1,\infty}^{2^m,|S|}. \tag{20}$$

З (19), (20), теореми Е та означення лінійного поперечника отримуємо

$$\lambda_m(B_{2,\infty}^{2^m,|S|}, l_{\infty,1}^{2^m,|S|}) = \lambda_m\left(\left(B_{2,1}^{2^m,|S|}\right)^\circ, l_{\infty,1}^{2^m,|S|}\right) =$$

$$= \lambda_m\left(\left(B_{\infty,1}^{2^m,|S|}\right)^\circ, l_{2,1}^{2^m,|S|}\right) \geq \lambda_m(B_{1,\infty}^{2^m,|S|}, l_{2,1}^{2^m,|S|}) \tag{21}$$

З огляду на (16)–(18) та (21) одержуємо

$$\lambda_M(H_p^\Omega, L_q) \gg \omega(2^{-m})2^{m(1/2-1/q)}|S|^{1/q-1}\lambda_m(B_{2,\infty}^{2^m,|S|}, l_{\infty,1}^{2^m,|S|}) \geq$$

$$\geq \omega(2^{-m})2^{m(1/2-1/q)}|S|^{1/q-1}\lambda_m(B_{1,\infty}^{2^m,|S|}, l_{2,1}^{2^m,|S|}). \tag{22}$$

Нарешті, скориставшись послідовно нерівністю (3) та теоремою Ж на основі (22), будемо мати

$$\lambda_M(H_p^\Omega, L_q) \gg \omega(2^{-m})2^{m(1/2-1/q)}|S|^{1/q-1}d_m(B_{1,\infty}^{2^m,|S|}, l_{2,1}^{2^m,|S|}) \gg$$

$$\gg \omega(2^{-m})2^{m(1/2-1/q)}|S|^{1/q-1}|S|\frac{\sqrt{\log\log|S|}}{\log|S|} =$$

$$= \omega(2^{-m})2^{m(1/2-1/q)}|S|^{1/q}\frac{\sqrt{\log\log|S|}}{\log|S|} \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-m})2^{m(1/2-1/q)}m^{\frac{d-1}{q}}\frac{\sqrt{\log\log m^{d-1}}}{\log m^{d-1}} \gg$$

$$\gg \omega(2^{-m})2^{m(1/2-1/q)}m^{\frac{d-1}{q}}\frac{\sqrt{\log\log m}}{\log m},$$

де $M \asymp 2^m m^{d-1}$.

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Нехай* $2 \le p < q < \infty$, *а функція* $\Omega(\mathrm{t}) = \omega(\prod_{j=1}^{d} t_j)$, *де* $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > 1/p - 1/q$, $l \in \mathbb{N}$. *Тоді має місце порядкове співвідношення*

$$\frac{\sqrt{\log\log m}}{\log m}\omega(2^{-m})2^{m(1/p-1/q)}m^{\frac{d-1}{q}} \ll \lambda_M(H_p^{\Omega}, L_q) \ll$$

$$\ll \omega(2^{-m})2^{m(1/p-1/q)}m^{\frac{d-1}{q}}, \tag{23}$$

де $M \asymp 2^m m^{d-1}$.

Доведення. Оцінка зверху в (23) випливає з оцінок наближення функцій з класів H_p^{Ω} їх східчасто гіперболічними сумами Фур'є [1].

Встановимо в (23) оцінку знизу. Нехай $f \in H_p^{\Omega}$, $2 \le p < \infty$. З теореми Д будемо мати

$$\sup_{\mathrm{s}} \omega^{-1}(2^{-(\mathrm{s},1)})\|\delta_{\mathrm{s}}(f)\|_p \ll$$

$$\ll \sup_{\mathrm{s}} \omega^{-1}(2^{-(\mathrm{s},1)})2^{(\mathrm{s},1)(1/2-1/p)}\|\delta_{\mathrm{s}}(f)\|_2 =$$

$$= \sup_{\mathrm{s}} \omega_1^{-1}(2^{-(\mathrm{s},1)})\|\delta_{\mathrm{s}}(f)\|_2,$$

де $\omega_1(\tau) = \omega(\tau)\tau^{1/2-1/p}$ — функція з множини $\Phi_{\alpha_1,l+1}$, $\alpha_1 = \alpha + (1/2 - 1/p) > 1/2 - 1/q$.

Звідси і з співвідношення (12) має місце вкладення

$$H_p^{\Omega} \supset H_2^{\Omega_1}, \tag{24}$$

де $\Omega_1(\mathrm{t}) = \omega_1(\prod_{j=1}^{d} t_j)$.

Оскільки оцінка знизу в теоремі 1 є справедливою і для $\alpha > 1/2 - 1/q$, то з (5), (24) і означення лінійного поперечника при $2 \le p < q < \infty$ будемо мати

$$\lambda_M(H_p^{\Omega}, L_q) \ge \lambda_M(H_2^{\Omega_1}, L_q) \gg$$

$$\gg \omega(2^{-m})2^{-m(1/2-1/p)}2^{m(1/2-1/q)}m^{\frac{d-1}{q}}\frac{\sqrt{\log\log m}}{\log m} =$$

$$= \omega(2^{-m}) 2^{m(1/p-1/q)} m^{\frac{d-1}{q}} \frac{\sqrt{\log\log m}}{\log m},$$

де $M \asymp 2^m m^{d-1}$.

Таким чином, теорему 2 доведено.

Якщо при оцінці знизу в теоремі 1 покласти $d = 1$, то $|S| = 1$, а тому

$$\lambda_M(B_{1,\infty}^{2^m,|S|}, l_{2,1}^{2^m,|S|}) = \lambda_M(B_1^{2^m}, l_2^{2^m}) \asymp 1.$$

Отже, в одновимірному випадку у (5), а, відповідно, і у (23) будуть мати місце точні за порядком оцінки:

$$\lambda_M(H_p^\Omega, L_q) \asymp \begin{cases} \Omega(M^{-1}) M^{1/2-1/q}, & 1 < p \le 2, p' < q < \infty, \\ \Omega(M^{-1}) M^{1/p-1/q}, & 2 \le p < q < \infty. \end{cases} \tag{25}$$

Співвідношення (25) встановлені у роботі [26].

Зауваження 1. Якщо $\Omega(\mathrm{t}) = \prod_{j=1}^d t_j^{r_j}$, $r_j > 0$, $j = \overline{1,d}$, то відповідні твердження до теорем 1 і 2 встановлено у роботі [11].

Зауваження 2. Теореми 1 і 2 доповнюють результати роботи [27], в якій встановлено точні за порядком оцінки лінійних поперечників класів $B_{p,\theta}^\Omega \subset B_{p,\infty}^\Omega \equiv H_p^\Omega$ у просторі L_q при $2 \le \theta \le q$.

1. *Пустовойтов Н.Н.* Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Anal. Math. — 1994. — **20**. — С. 35 – 48.
2. *Никольский С.М.* Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гельдера // Сиб. мат. журн. — 1963. — **4**,№6. — С. 1342 – 1364.
3. *Бари Н.К., Стечкин С.Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1956. — **5**. — С. 483 – 522.
4. *Тихомиров В.М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. — 1960. — **15**, №3. — С. 81 – 120.
5. *Исмагилов Р.С.* Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами // Успехи мат. наук. — 1974. — **29**, №3. — С. 161 – 178.
6. *Майоров В.Е.* Тригонометрические n-поперечники класса W_1^r в пространстве L_q // Математическое программирование и смежные вопросы. Теория операторов в линейных пространствах. – М.: ЦЭМИ — 1976. — С. 199 – 208.

7. *Майоров В.Е.* О линейных поперечниках соболевских классов и цепочках экстремальных подпространств // Мат. сб. — 1980. —**113**, №3. — С. 437 – 463.
8. *Тихомиров В.М.* Некоторые вопросы теории приближений. — М.: Москов. гос. ун-т, 1976. — 304 с.
9. *Корнейчук Н.П.* Точные константы в теории приближения. — М.: Наука, 1987. — 424 с.
10. *Галеев Э.М.* О линейных поперечниках классов периодических функций многих переменных // Вестник МГУ, Сер. 1, Мат., Мех. — 1987. — **4**. — С. 13 – 16.
11. *Галеев Э.М.* Линейные поперечники классов Гельдера-Никольского периодических функций многих переменных // Мат. заметки. — 1996. — **59**, №2. — С. 189 – 199.
12. *Романюк А.С.* Линейные поперечники классов Бесова периодических функций многих переменных. I // Укр. мат. журн. — 2001. — **53**, №5. — С. 647 – 661.
13. *Романюк А.С.* Линейные поперечники классов Бесова периодических функций многих переменных. II // Укр. мат. журн. — 2001. — **53**, №6. — С. 820 – 829.
14. *Романюк А.С.* Поперечники и наилучшее приближение классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных // Anal. Math. — 2011. — **37**, №3. — С. 181 – 213.
15. *Романюк А.С.* Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных // Праці Інституту математики НАН України. — 2012. — **93**. — 352 с.
16. *Kolmogoroff A.* Über die beste annäherung von funktionen einer gegebenen funktionenklasse // Ann. of Math. — 1963. — **37**, №1. — С. 107 – 110.
17. *Глускин Е.Д.* Нормы случайных матриц и поперечники конечномерных множеств // Мат. сб. — 1983. — **120**, №2. — С. 180 – 189.
18. *Кашин Б.С.* О некоторых свойствах матриц ограниченных операторов из пространства l_2^n в l_2^m // Изв. АН Арм. ССР (сер. мат.). — 1980. — **15**, №5. — С. 379 – 394.
19. *Галеев Э.М.* Поперечники по Колмогорову классов периодических функций многих переменных $\widetilde{W}_p^{\bar\alpha}$ и $\widetilde{H}_p^{\bar\alpha}$ в пространстве $\widetilde{L}_q$ // Изв. АН СССР (сер. мат.). — 1985. — **49**, №5. — С. 916 – 934.
20. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т.— М.: Мир, 1965. — Т. 2. — 537 с.
21. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.— М.: Наука, 1969. — 480 с.
22. *Темляков В.Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. МИАН СССР. — 1986. — **178**. — С. 3 – 113.

23. *Jackson D.* Certain problems of closest approximation // Bull. Amer. Math. Soc. — 1933. — **39**, №12. — P. 889 – 906.

24. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Двойственность выпуклых функций и экстремальные задачи // Успехи мат. наук. — 1968. — **23**, №6. — С. 51 – 116.

25. *Изаак А.Д.* Поперечники по Колмогорову в конечномерных пространствах со смешанной нормой // Мат. заметки. — 1994. — **55**, №1. — С. 43 – 52.

26. *Конограй А.Ф.* Лінійні поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій однієї та багатьох змінних // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2010. — **7**, №1. — С. 94 – 112.

27. *Федуник О.В.* Лінійні поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q // Укр. мат. журн. — 2006. — **58**, №1. — С. 93 – 104.