УДК 517.5

Н. В. Дерев'янко (Ін–т математики НАН України, Київ)

ОЦІНКИ ОРТОПРОЕКЦІЙНИХ ПОПЕРЕЧНИКІВ КЛАСІВ $B^{\Omega}_{p,\theta}$ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ В ПРОСТОРІ L_q

Obtained in this paper are the exact order estimates of orthoprojective widths of the classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ of periodic functions of many variables in the space L_q for $1 \le p < q \le \infty$.

Отримано точні по порядку оцінки ортопроекційних поперечників класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q при $1 \le p < q \le \infty$.

В даній роботі встановлено точні за порядком оцінки ортопроекційних поперечників класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних в просторі L_q. Паралельно досліджено наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ в метриці L_q лінійними операторами, які підпорядковуються деяким умовам. Більш детально про ці величини мова буде йти пізніше, а спочатку наведемо необхідні позначення та означення.

Нехай $\mathbb{R}^d$, $d \ge 1$, — d-вимірний евклідів простір з елементами $\mathrm{x} = (x_1, ..., x_d)$, $\mathrm{y} = (y_1, ..., y_d)$, $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = x_1 y_1 + ... + x_d y_d$, і $L_p(\pi_d)$, $\pi_d = \prod_{j=1}^{d} [-\pi, \pi]$, — простір 2π-періодичних за кожною змінною і сумовних у степені p, $1 \le p < \infty$ (відповідно суттєво обмежених при $p = \infty$), на кубі π_d функцій $f(\mathrm{x}) = f(x_1, ..., x_d)$, норма в якому визначається таким чином:

$$\|f\|_{L_p(\pi_d)} = \|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(\mathrm{x})|^p d\mathrm{x} \right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_{L_\infty(\pi_d)} = \|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathrm{x} \in \pi_d} |f(\mathrm{x})|.$$

Для $f \in L_p(\pi_d)$ і $\mathrm{h} \in \mathbb{R}^d$ покладемо

$$\Delta_{\mathrm{h}} f(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x} + \mathrm{h}) - f(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Далі означимо згідно з формулою

$$\Delta_{\mathrm{h}}^{l} f(\mathrm{x}) = \Delta_{\mathrm{h}} \Delta_{\mathrm{h}}^{l-1} f(\mathrm{x}) \ , \quad \Delta_{\mathrm{h}}^{0} f(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}),$$

— кратну різницю порядку $l \in \mathbb{N}$ функції f у точці $\mathrm{x} = (x_1, ..., x_d)$ з кроком h, яку також можна подати за допомогою такого співвідношення

$$\Delta_{\mathrm{h}}^{l} f(\mathrm{x}) = \sum_{n=0}^{l} (-1)^{l+n} C_l^n f(\mathrm{x} + n\mathrm{h}).$$

Означимо модуль неперервності порядку $l \in \mathbb{N}$ функції $f \in L_p(\pi_d)$ згідно з формулою

$$\Omega_l(f;t)_p = \sup_{|\mathrm{h}| \le t} \|\Delta_h^l f(\cdot)\|_p \ ,$$

де $|\mathrm{h}|$ — евклідова норма h.

Нехай $\Omega(t)$ — функція типу модуля неперервності порядку l, яка задана на $\mathbb{R}_+ = \{t, t \ge 0\}$, тобто $\Omega(t)$ задовольняє такі умови:

1) $\Omega(0) = 0$, $\Omega(t) > 0$ для $t > 0$;

2) $\Omega(t)$ неперервна;

3) $\Omega(t)$ неспадна;

4) для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$: $\Omega(nt) \le C_1 n^l \Omega(t)$, де $l \in \mathbb{N}$, стала $C_1 > 0$ не залежить від n і t.

Множину таких функцій Ω позначимо через Ψ_l. Зауважимо, що якщо $f \in L_p(\pi_d)$, то $\Omega_l(f;t)_p \in \Psi_l$.

Також будемо вважати, що Ω належить множинам S^α і S_l. Це означає наступне:

I. $\Omega \in S^\alpha$, $\alpha > 0$, якщо функція $\Omega(\tau)/\tau^\alpha$ майже зростає, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_2 > 0$, що

$$\frac{\Omega(\tau_1)}{\tau_1^\alpha} \le C_2 \frac{\Omega(\tau_2)}{\tau_2^\alpha} \ , \qquad 0 < \tau_1 \le \tau_2.$$

II. $\Omega \in S_l$, якщо існує γ, $0 < \gamma < l$, таке що функція $\Omega(\tau)/\tau^\gamma$ майже спадає, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_3 > 0$, що

$$\frac{\Omega(\tau_1)}{\tau_1^\gamma} \ge C_3 \frac{\Omega(\tau_2)}{\tau_2^\gamma} \ , \qquad 0 < \tau_1 \le \tau_2.$$

Умови належності функції Ω до множин S^{α} і S_l називають умовами Барі-Стєчкіна [1].
Покладемо також $\Phi_{\alpha,l} = \Psi_l \cap S^{\alpha} \cap S_l$.

Наведемо приклад функції $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$:

$$\Omega(t) = \begin{cases} t^r \left(\log^+(\frac{1}{t}) \right)^b , & t > 0 \ , \\ 0, & t = 0 \ , \end{cases}$$

де $\log^+(\tau) = \max\{1, \ \log(\tau)\}, \quad \alpha < r < l$, а b — фіксоване дійсне число.

Тепер перейдемо безпосередньо до означення просторів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ (див., наприклад, [2]).

Нехай $1 \le p, \theta \le \infty$ і $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$. Будемо вважати, що $f \in B^{\Omega}_{p,\theta}$, якщо f задовольняє такі умови:

1) $f \in L_p(\pi_d)$;

2) $|f|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} < \infty$,

де напівнорма $|f|_{B^{\Omega}_{p,\theta}}$ визначається співвідношенням

$$|f|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^{+\infty} (\frac{\Omega_\ell(f;t)_p}{\Omega(t)})^\theta \frac{dt}{t} \right)^{1/\theta}, 1 \le \theta < \infty \ , \\ \quad \sup\limits_{t>0} \frac{\Omega_\ell(f,t)_p}{\Omega(t)} \ , \qquad\qquad \theta = \infty. \end{cases}$$

Простір $B^{\Omega}_{p,\theta}$ — лінійний нормований простір з нормою

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} = \|f\|_p + |f|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \ .$$

Якщо $\Omega(t) = t^r$, то простори $B^{\Omega}_{p,\theta}$ збігаються з просторами О.В. Бєсова $B^r_{p,\theta}$ [3] і, зокрема, при $\theta = \infty$ отримаємо $B^r_{p,\infty} = H^r_p$, де H^r_p — простори введені С.М. Нікольським [4]. Якщо $\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \le 1$ будемо говорити, що функція f належить класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$.

Надалі будемо вважати, що для двох невід'ємних величин A і B запис $A \asymp B$ означає, що існують константи C_4 , $C_5 > 0$ такі, що $C_4 A \le B \le C_5 A$. Записи $A \ll B$ або $A \gg B$, означають що $C_6 A \le \le B$ і $B \le C_7 A$ відповідно. Всі константи C_i , $i = 1, 2, ...$, які будуть зустрічатися у роботі, можуть залежати лише від тих параметрів, що входять в означення класу, метрики, в якій оцінюється похибка наближення, та розмірності простору $\mathbb{R}^d$.

Далі нам зручно буде користуватися означенням класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ в дещо іншому вигляді.

Позначимо через $V_m(t)$, $m \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$, ядро Валле Пуссена вигляду

$$V_m(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{m} \cos kt + 2\sum_{k=m+1}^{2m-1} \left(\frac{2m-k}{m}\right) \cos kt.$$

Багатовимірне ядро $V_m(\mathrm{x})$, $m \in \mathbb{N}$, $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^d$, означимо за формулою

$$V_m(\mathrm{x}) = \prod_{j=1}^{d} V_m(x_j).$$

Для функції $f \in L_p(\pi_d)$ розглянемо оператор згортки $\mathbf{V}_m$ цієї функції з ядром V_m, тобто

$$\mathbf{V}_m f = f * V_m = \mathrm{V}_m(f,\mathrm{x}), \quad \mathrm{x} \in \mathbb{R}^d \ .$$

Таким чином, $V_m(f,x)$ — кратна сума Валле Пуссена функції f. Покладемо для $f \in L_p(\pi_d)$

$$\sigma_0(f,\mathrm{x}) = V_1(f,\mathrm{x}) \ , \quad \sigma_s(f,\mathrm{x}) = V_{2^s}(f,\mathrm{x}) - V_{2^{s-1}}(f,\mathrm{x}), \quad s \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{x} \in \mathbb{R}^d.$$

В наведених позначеннях при $1 \le p \le \infty$ (з точністю до абсолютних сталих) класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ можна означити таким чином (див., наприклад, [2]): $B^{\Omega}_{p,\theta} = \{f \in L_p(\pi_d) : \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \le 1\}$, де

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \begin{cases} \left(\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}_+} \left(\frac{\|\sigma_s(f,\cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})} \right)^{\theta} \right)^{1/\theta}, & 1 \le \theta < \infty \ , \\ \sup\limits_{s\in\mathbb{Z}_+} \frac{\|\sigma_s(f,\cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})} \ , & \theta = \infty \ . \end{cases} \tag{1}$$

Варто зазначити, що у випадку $1 < p < \infty$ можна записати еквівалентне співвідношення для норм функцій з класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$, $1 \le \theta \le \infty$, використовуючи в (1) замість $\sigma_s(f,x)$ двійкові "блоки" ряду Фур'є функції f.

Наведемо далі твердження, які будемо використовувати при доведенні основних результатів. Позначимо через $\mu(s)$, $s \in \mathbb{Z}_+$, підмножину цілочислової решітки $\mathbb{Z}^d$ вигляду

$$\mu(s) = \{\mathrm{k} = (k_1, ..., k_d) : \ [2^{s-1}] \le \max_{j=\overline{1,d}} |k_j| < 2^s\},$$

де $[a]$ ціла частина числа a, і для $f \in L_p(\pi_d)$ позначимо

$$f_0(\mathrm{x}) = \widehat{f}(0) \quad i \quad f_s(\mathrm{x}) = \sum_{\mathrm{k}\in\mu(s)} \widehat{f}(\mathrm{k}) e^{i(\mathrm{k},\mathrm{x})} \ , \quad s \in \mathbb{N},$$

де

$$\widehat{f}(\mathrm{k}) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(\mathrm{t}) e^{-i(\mathrm{k},\mathrm{t})} d\mathrm{t}$$

— коефіцієнти Фур'є функції f.

Теорема А [5]. *Нехай* $f \in L_p(\pi_d)$, $1 < p < \infty$. *Тоді існують додатні сталі* C_8 *і* C_9 *такі, що*

$$C_8 \|f\|_p \le \left\| \left(\sum_{s=0}^{\infty} |f_s(\cdot)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \le C_9 \|f\|_p \ .$$

Теорема Б [4]. *Нехай* $n_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$ *і*

$$t(\mathrm{x}) = \sum_{|k_j| \le n_j, j=\overline{1,d}} c_{\mathrm{k}} \ e^{i(\mathrm{k},\mathrm{x})} \ .$$

Тоді при $1 \le q < p \le \infty$ *виконується нерівність*

$$\|t\|_p \le 2^d \prod_{j=1}^{d} n_j^{1/q-1/p} \|t\|_q \ . \tag{2}$$

Нерівність (2) доведена С.М. Нікольським і називається "нерівністю різних метрик". У випадку $d = 1$ і $p = \infty$ відповідну нерівність довів Джексон [6].

Перейдемо далі до означення досліджуваних апроксимативних характеристик. Нехай $\{u_i(\mathrm{x})\}_{i=1}^m$ — ортонормована система функцій $u_i \in L_\infty(\pi_d)$. Кожній функції $f \in L_q(\pi_d),\ 1 \le q \le \infty$, поставимо у відповідність апарат наближення вигляду

$$\sum_{i=1}^m (f, u_i) u_i(\mathrm{x}),$$

тобто ортогональну проекцію функції f на підпростір породжений системою функцій $\{u_i\}_{i=1}^m$. Тут і далі

$$(f, u_i) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(\mathrm{x}) \overline{u_i(\mathrm{x})} d\mathrm{x}.$$

Якщо $F \subset L_q(\pi_d)$ — деякий функціональний клас, то величина

$$d_m^\perp(F, L_q) = \inf_{\{u_i\}_{i=1}^m} \sup_{f \in F} \left|\left| f - \sum_{i=1}^m (f, u_i) u_i \right|\right|_q \tag{3}$$

називається ортопроекційним поперечником цього класу в просторі $L_q(\pi_d)$. Ортопроекційний поперечники введений В.М. Темляковим [7].

Паралельно з поперечниками $d_m^\perp(F,\ L_q)$ будемо розглядати величини $d_m^B(F,\ L_q)$, також введені В.М. Темляковим (див., наприклад, [8]), які означаються за формулою

$$d_m^B(F,\ L_q) = \inf_{G \in \mathcal{L}_m(B)_q} \sup_{f \in F \cap D(G)} ||f - Gf||_q. \tag{4}$$

Тут через $\mathcal{L}_m(B)_q$ позначено множину лінійних операторів G, які задовольняють умови:

а) область визначення $D(G)$ цих операторів містить всі тригонометричні поліноми, а їх область значення міститься в підпросторі розмірності m простору $L_q(\pi_d)$;

б) існує число $B \ge 1$ і для всіх векторів $\mathrm{k} = (k_1, ..., k_d)$ виконується нерівність

$$||G e^{i(\mathrm{k},\cdot)}||_2 \le B.$$

Зауважимо, що до $\mathcal{L}_m(1)_2$ належать оператори ортогонального проектування на підпростори розмірності m, а також оператори, які задаються по ортонормованій системі функцій за допомогою мультиплікатора, який означається послідовністю $\{\lambda_l\}$ такою, що $|\lambda_l| \le 1$ для всіх l.

Згідно з означенням величин $d^{\perp}_m(F,\ L_q)$ і $d^{B}_m(F,\ L_q)$ вони пов'язані між собою нерівністю

$$d^{B}_m(F,\ L_q) \le d^{\perp}_m(F,\ L_q). \tag{5}$$

Отже, оцінки знизу величин $d^{B}_m(F,\ L_q)$ можуть служити оцінками знизу для ортопроекційних поперечників $d^{\perp}_m(F,\ L_q)$ і, навпаки, оцінки зверху для поперечників $d^{\perp}_m(F,\ L_q)$ можна використовувати для оцінок зверху величин $d^{B}_m(F,\ L_q)$. Цю обставину будемо використовувати при доведенні відповідних тверджень. Відмітимо також, що при доведенні оцінок знизу величин $d^{B}_m(B^{\Omega}_{p,\theta},\ L_q)$ будемо використовувати метод, який застосовував В.М. Темляков при встановленні оцінок величин $d^{B}_m(F,\ L_q)$ для класів $F = W^{r}_{p,\alpha}$ або $F = H^{r}_{p}$ [7–9]. Суть цього методу полягає в побудові функцій з класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$, які "погано" наближаються за допомогою операторів G.

Детальнішу інформацію стосовно дослідження величин (3) і (4) можна знайти у роботах [9–13], а також у монографіях [8] та [14].

При встановленні оцінок зверху поперечників $d^{\perp}_m(F,\ L_q)$ нам знадобляться відомі оцінки наближення функцій з класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ їх кубічними сумами Фур'є. Для того, щоб сформулювати відповідні результати наведемо необхідні позначення та означення.

Для $f \in L_1(\pi_d)$ і $n \in \mathbb{N}$ через $S_{\square_{2^n}}(f)(\mathrm{x})$ позначимо кратну суму Фур'є

$$S_{\square_{2^n}}(f)(\mathrm{x}) = \sum_{\mathrm{k} \in \square_{2^n}} \widehat{f}(\mathrm{k}) e^{i(\mathrm{k},\mathrm{x})},$$

де $\square_{2^n} = \{\mathrm{k} = (k_1, ..., k_d)\ :\ |k_j| < 2^n,\ 1 \le j \le d\}$, яку називають кубічною сумою Фур'є.

Для $f \in L_q(\pi_d),\ 1 \le q \le \infty$, покладемо

$$\mathcal{E}_{\square_{2^n}}(f)_q = \|f - S_{\square_{2^n}}(f)\|_q,$$

а для функціонального класу $F \subset L_q(\pi_d)$

$$\mathcal{E}_{\square_{2^n}}(F)_q = \sup_{f \in F} \mathcal{E}_{\square_{2^n}}(f)_q \ .$$

Теорема B [15]. *Нехай* $1 \le p, q, \theta \le \infty$, $(p,q) \notin \{(1,1),(\infty,\infty)\}$ *і функція* $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > d(1/p-1/q)_+$. *Тоді*

$$\mathcal{E}_{\square_{2^n}}(B^{\Omega}_{p,\theta})_q \asymp \Omega(2^{-n}) 2^{nd(1/p-1/q)_+} \ ,$$

де $a_+ = \max\{a; 0\}$.

Тепер перейдемо до формулювання і доведення отриманих результатів.

Теорема. *Нехай* $1 \le p < q \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ *і функція* $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})$. *Тоді*

$$d^B_m(B^{\Omega}_{p,\theta},\ L_q) \asymp d^{\perp}_m(B^{\Omega}_{p,\theta},\ L_q) \asymp \Omega(m^{-1/d}) m^{1/p-1/q}. \tag{6}$$

Доведення. Встановимо спочатку в (6) оцінки зверху для ортопроекційного поперечника $d^{\perp}_m(B^{\Omega}_{p,\theta},\ L_q)$ і відповідно для величини $d^B_m(B^{\Omega}_{p,\theta},\ L_q)$. Оскільки величини $d^{\perp}_m(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q)$ і $\mathcal{E}_{\square_{2^n}}(B^{\Omega}_{p,\theta})_q$, де $m \asymp 2^{nd}$, пов'язані між собою порядковою нерівністю

$$d^{\perp}_m(B^{\Omega}_{p,\theta},\ L_q) \ll \mathcal{E}_{\square_{2^n}}(B^{\Omega}_{p,\theta})_q,$$

то згідно з теоремою B і нерівністю (5) можемо записати

$$d^B_m(B^{\Omega}_{p,\theta},\ L_q) \le d^{\perp}_m(B^{\Omega}_{p,\theta},\ L_q) \ll \Omega(2^{-n}) 2^{nd(1/p-1/q)} \asymp$$

$$\asymp \Omega(m^{-1/d}) m^{1/p-1/q}.$$

Оцінку зверху одержано.

Тепер перейдемо до встановлення в (6) оцінок знизу. Оскільки має місце вкладення $B^{\Omega}_{p,1} \subset B^{\Omega}_{p,\theta}$, $1 < \theta \le \infty$, то з огляду на нерівність (5) відповідну оцінку достатньо отримати для величин $d^B_m(B^{\Omega}_{p,1},\ L_q)$. Зробимо спочатку деякі зауваження і наведемо допоміжні твердження, які будуть при цьому використовуватись.

При оцінці знизу величин $d^B_m(B^{\Omega}_{p,1},\ L_q)$, будемо вважати, що оператори G належать множині $\mathcal{L}_m(B)_2$ і у зв'язку з цим наведемо міркування Темлякова В.М. (див., наприклад, [9]), які підверджують, що таке припущення не є додатковим обмеженням на оператори G.

У випадку $q \geq 2$ умова $G \in \mathcal{L}_m(B)_2$ є безпосереднім наслідком умови $G \in \mathcal{L}_m(B)_q$. Покажемо тепер, що якщо $G \in \mathcal{L}_m(B)_q$ при $1 \leq q < 2$, то $G \in \mathcal{L}_m(B)_2$.

Нехай

$$V_L(\mathrm{x}) = \prod_{j=1}^{d} V_L(x_j)$$

— ядро Валле Пуссена для куба $[-L,\ L]^d$ з ребром $2L+1$ і

$$\mathbf{V}_L f = f * V_L.$$

Відомо, що для довільного тригонометричного полінома t з "номерами" гармонік з $[-L,\ L]^d$ і довільної функції $f \in L_q(\pi_d)$, $1 \leq q \leq \infty$, виконуються співвідношення

$$\mathbf{V}_L t = t, \quad \|\mathbf{V}_L f\|_q \leq 3^d \|f\|_q.$$

Нехай $G \in \mathcal{L}_m(B)_q$. Розглянемо оператор $A = \mathbf{V}_L G$. Тоді $A \in \mathcal{L}_m(B)_2$ і для будь-якого тригонометричного полінома з номерами гармонік з $[-L,\ L]^d$ можемо записати

$$\|t - At\|_q = \|\mathbf{V}_L(t - Gt)\|_q \leq 3^d \|t - Gt\|_q.$$

Із цієї нерівності випливає, що при отримані порядкових оцінок знизу величин $d^B_m(F \cap \mathcal{T},\ L_q)$, де $\mathcal{T}$ — множина тригонометричних поліномів, умови $G \in \mathcal{L}_m(B)_2$ і $G \in \mathcal{L}_m(B)_q$ рівносильні.

Отже, нехай оператор $G \in \mathcal{L}_m(B)_2$ і для довільного вектора $\mathrm{k} = (k_1, ..., k_d)$

$$Ge^{i(\mathrm{k},\mathrm{x})} = \sum_{l=1}^{\overline{m}} a^{\mathrm{k}}_l \psi_l(\mathrm{x}),$$

де $\overline{m}$ — розмірність підпростору значень оператора G в $L_2(\pi_d)$, а $\{\psi_l(\mathrm{x})\}_{l=1}^{\overline{m}}$ — ортонормований базис в цьому підпросторі. Зауважимо, що $\overline{m} \leq m$ і для всіх $\mathrm{k} = (k_1, ..., k_d)$

$$\sum_{l=1}^{\overline{m}} |a^{\mathrm{k}}_l|^2 \leq B^2,$$

а також для довільного l

$$\sum_{\mathrm{k}} |\widehat{\psi}_l(\mathrm{k})|^2 \leq 1.$$

Далі будемо користуватися допоміжним твердженням (див., наприклад, [9]).

Лемма A. Нехай A — лінійний оператор, такий що для довільного вектора $\mathrm{k} = (k_1, ..., k_d),\ k_j \in \mathbb{Z},\ j = \overline{1, d}$,

$$Ae^{i(\mathrm{k},\mathrm{x})} = \sum_{l=1}^{\overline{m}} a_l^{\mathrm{k}} \psi_l(\mathrm{x}),$$

де $\{\psi_l(\mathrm{x})\}_{l=1}^{\overline{m}}$ — задана система функцій для якої $||\psi_l(\cdot)||_2 \leq 1$, $l = \overline{1,\ \overline{m}}$.

Тоді для довільного тригонометричного полінома t буде виконуватись нерівність

$$\min_{\mathrm{y}=\mathrm{x}} \ Re\ At(\mathrm{x}-\mathrm{y}) \leq \left\{ \overline{m} \sum_{l=1}^{\overline{m}} \sum_{\mathrm{k}} |a_l^{\mathrm{k}} \widehat{t}(\mathrm{k})|^2 \right\}^{1/2}.$$

Тепер перейдемо безпосередньо до отримання оцінки знизу величин $d_m^B(B_{p,1}^{\Omega},\ L_q)$.

Розглянемо функцію

$$\varphi_n(\mathrm{x}) = e^{i(\mathrm{k}^n,\mathrm{x})} \prod_{j=1}^{d} K_{2^{n-2}-1}(x_j),$$

де

$$K_{l-1}(t) = \sum_{|k| \leq l-1} \left(1 - \frac{|k|}{l}\right) e^{ikt}$$

— ядро Фейєра порядку l, $\ K_m(t) \equiv 1$ при $m < 1$ і $\mathrm{k}^n = (k_1^n, ..., k_d^n)$,

$$k_j^n = \begin{cases} 2^{n-1} + 2^{n-2}, & n \geq 2, \\ 1, & n = 1. \end{cases}$$

Через $\rho(n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, позначимо підмножину цілочислової решітки $\mathbb{Z}^d$ вигляду

$$\rho(n) = \{\mathrm{k} = (k_1, ..., k_d) : \ [2^{n-1}] \leq |k_j| < 2^n, \ j = \overline{1, d}\}.$$

Тоді $T(\mu(n))$ і $T(\rho(n))$ — відповідно множини тригонометричних поліномів з "номерами" гармонік із $\mu(n)$ і $\rho(n)$. Далі позначимо через Q_n множину "номерів" гармонік функції φ_n. Згідно з означенням цієї функції $Q_n \subset \rho(n)$. Зауважимо також, що $\rho(n) \subset \mu(n)$ і відповідно $T(\rho(n)) \subset T(\mu(n))$.

Нехай задано оператор $G \in \mathcal{L}_m(B)_q$, $m < |Q_n|$. Тут і далі через $|M|$ будемо позначати кількість елементів множини M. Розглянемо оператор A вигляду

$$A = (S_n - S_{n-1})G.$$

Тоді $A \in \mathcal{L}_m(B)_q$ і областю значень оператора A є підпростір $A_m \subset \subset T(\mu(n))$ розмірності $dim A_m = \overline{m} \leq m$. Крім того, згідно з наслідком з теореми A

$$\|S_l\|_{q \to q} \leq C_{10}, \quad 1 < q < \infty, \quad l \in \mathbb{Z}_+$$

і тому для $f \in T(\mu(n))$ можемо записати

$$\|f - Af\|_q = \|(S_n - S_{n-1})(f - Gf)\|_q \ll \|f - Gf\|_q,$$

і, як наслідок,

$$\inf_{A \in \mathcal{L}_m(B)_q} \sup_{f \in B^{\Omega}_{p,\theta} \cap T(\mu(n))} \|f - Af\|_q \ll d^B_m(B^{\Omega}_{p,\theta}, \ L_q), \tag{7}$$

де inf береться по множині $\mathcal{L}_m(B)_q$ операторів A з областю значень $A_m \subset T(\mu(n))$.

Встановимо оцінку знизу величин в лівій частині співвідношення (7).

Нехай спочатку $q = \infty$. Розглянемо величину

$$I = \sup_{y} \|\varphi_n(\mathrm{x} - \mathrm{y}) - A\varphi_n(\mathrm{x} - \mathrm{y})\|_{\infty}.$$

Легко бачити, що

$$I \geq \varphi_n(0) - \min_{\mathrm{y}=\mathrm{x}} \ Re \ A\varphi_n(\mathrm{x} - \mathrm{y}). \tag{8}$$

Оцінимо кожний доданок правої частини (8). Згідно з означенням функції φ_n можемо записати

$$\varphi_n(0) \geq C_{11}|Q_n|, \quad C_{11} > 0. \tag{9}$$

Далі, нехай $\{\psi_l(\mathrm{x})\}_{l=1}^{\overline{m}}$ — ортонормований базис в A_m і

$$Ae^{i(\mathrm{k},\mathrm{x})} = \sum_{l=1}^{\overline{m}} a_l^{\mathrm{k}} \psi_l(\mathrm{x}).$$

Тоді

$$\left(\sum_{l=1}^{\overline{m}} |a_l^k|^2\right)^{1/2} \leq B$$

і згідно з лемою A маємо

$$\min_{\mathrm{y}=\mathrm{x}} \ Re\ A\varphi_n(\mathrm{x}-\mathrm{y}) \leq \left\{\overline{m} \sum_{l=1}^{\overline{m}} \sum_{\mathrm{k}\in Q_n} |a_l^{\mathrm{k}} \widehat{\varphi}_n(\mathrm{k})|^2\right\}^{1/2} \leq$$

$$\leq \left\{\overline{m} \sum_{l=1}^{\overline{m}} \sum_{\mathrm{k}\in Q_n} |a_l^{\mathrm{k}}|^2\right\}^{1/2} = \left\{\overline{m} \sum_{\mathrm{k}\in Q_n} \sum_{l=1}^{\overline{m}} |a_l^{\mathrm{k}}|^2\right\}^{1/2} \leq$$

$$\leq B(m|Q_n|)^{1/2}. \tag{10}$$

Виберемо $n \in \mathbb{N}$ так, щоб виконувались співвідношення

$$m \asymp 2^{nd}, \quad C_{11}|Q_n| > 2B(m|Q_n|)^{1/2}.$$

Тоді використовуючи оцінки (8)–(10) і враховуючи, що $|Q_n| \asymp 2^{nd}$, отримуємо

$$I = \sup_{\mathrm{y}} \|\varphi_n(\mathrm{x}-\mathrm{y}) - A\varphi_n(\mathrm{x}-\mathrm{y})\|_\infty \geq$$

$$\geq C_{11}|Q_n| - B(m|Q_n|)^{1/2} > B(m|Q_n|)^{1/2} \gg 2^{nd}.$$

Відповідно, знайдеться y^* такий, що

$$\|\varphi_n(\mathrm{x}-\mathrm{y}^*) - A\varphi_n(\mathrm{x}-\mathrm{y}^*)\|_\infty \gg 2^{nd}. \tag{11}$$

Розглянемо тепер випадок $1 < q < \infty$. Оскільки поліноми $t \in T(\mu(n))$ мають степінь не вище 2^n по кожній змінній $x_j,\ j = \overline{1,d}$, то згідно з нерівністю різних метрик можемо записати

$$\|t\|_\infty \ll 2^{nd/q}\|t\|_q.$$

Скориставшись (11), будемо мати

$$\|\varphi_n(x - y^*) - A\varphi_n(x - y^*)\|_q \gg$$

$$\gg 2^{-nd/q}\|\varphi_n(\mathrm{x}-\mathrm{y}^*) - A\varphi_n(\mathrm{x}-\mathrm{y}^*)\|_\infty \gg 2^{-nd/q}2^{nd} = 2^{nd(1-1/q)}. \quad (12)$$

Для завершення доведення оцінки знизу величини $d^B_m(B^{\Omega}_{p,1},\ L_q)$ розглянемо функцію

$$g(\mathrm{x}) = C_{12}\Omega(2^{-n})2^{-nd(1-1/p)}\varphi_n(\mathrm{x}), \quad C_{12} > 0.$$

Використовуючи властивість ядра Фейєра (див., наприклад, [14, с. 91])

$$\|\sigma_n(\varphi_n, \cdot)\|_p \asymp 2^{nd(1-1/p)}, \quad 1 \le p \le \infty,$$

згідно з означенням $\|\cdot\|_{B^{\Omega}_{p,1}}$, а також враховуючи те, що функція $\Omega(t)$ не спадає при $t \ge 0$, отримуємо

$$\|\varphi_n\|_{B^{\Omega}_{p,1}} = \sum_{s=0}^{n} \Omega^{-1}(2^{-s})\|\sigma_s(\varphi_n, \cdot)\|_p \le$$

$$\le \Omega^{-1}(2^{-n}) \sum_{s=0}^{n} \|\sigma_s(\varphi_n, \cdot)\|_p \ll$$

$$\ll \Omega^{-1}(2^{-n})\|\sigma_n(\varphi_n, \cdot)\|_p \asymp \Omega^{-1}(2^{-n})2^{nd(1-1/p)}\ .$$

Звідси випливає, що при відповідному виборі константи $C_{12} > 0$ функція g належить до класу $B^{\Omega}_{p,1}$.

Таким чином, використовуючи оцінки (11) і (12) відповідно при $q = \infty$ і $1 < q < \infty$, на підставі (7) будемо мати

$$d^B_m(B^{\Omega}_{p,\theta},\ L_q) \gg d^B_m(B^{\Omega}_{p,1},\ L_q) \gg \|g(\mathrm{x} - \mathrm{y}^*) - Ag(\mathrm{x} - \mathrm{y}^*)\|_q \gg$$

$$\gg \Omega(2^{-n})2^{-nd(1-1/p)}\|\varphi_n(\mathrm{x} - \mathrm{y}^*) - A\varphi_n(\mathrm{x} - \mathrm{y}^*)\|_q \gg$$

$$\gg \Omega(2^{-n})2^{-nd(1-1/p)}2^{nd(1-1/q)} =$$
$$= \Omega(2^{-n})2^{nd(1/p-1/q)} \asymp \Omega(m^{-1/d})m^{1/p-1/q}.$$

Оцінка знизу, а разом з нею і теорема доведені.

На завершення роботи наведемо деякі зауваження.

***Зауваження*1.** *Якщо $\Omega(t) = t^r$, то відповідне твердження до теореми 1 встановлено раніше у роботі [16].*

***Зауваження*2.** *В одновимірному випадку оцінки (6) були встановлені у роботі [17].*

1. *Бари Н.К., Стечкин С.Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1956. — **5**. — С. 483 – 522.
2. *Xu Guiqiao.* The n-widths for a generalized periodic Besov classes // Acta Math. Sci. — 2005. — **25**, №4. — P. 663 – 671.
3. *Бесов О.В.* О некотором семействе функциональных пространств. Теоремы вложения и продолжения. // Докл. АН СССР. — 1959. — **126**, №6. — С. 1163 – 1165.
4. *Никольский С.М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. — 1951. — **38**. — С. 244 – 278.
5. *Лизоркин П.И.* Обобщенные гельдеровы пространства $B^{(r)}_{p,\theta}$ и их соотношения с пространствами Соболева $L^{(r)}_p$ // Сиб. мат. журн. — 1968. — **9**, №5. — С. 1127 – 1152.
6. *Jackson D.* Certain problems of closest approximation // Bull.Amer. Math. Soc. — 1933. — **39**, №12. — P. 889 – 906.
7. *Темляков В.Н.* Поперечники некоторых классов функций нескольких переменных // Докл. АН СССР. — 1982. — **267**, №2. — С. 314 – 317.
8. *Темляков В.Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1986. — **178**, №2. — С. 3 – 113.
9. *Темляков В.Н.* Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью // Тр. МИАН СССР. — 1989. — **189**. — С. 138 – 168.
10. *Андрианов А.В., Темляков В.Н.* О двух методах распространения свойств систем функций от одной переменной на их тензорное произведение // Тр. МИРАН. — 1997. — **219**. — С. 32 – 43.
11. *Галеев Э.М.* Порядки ортопроекционных поперечников классов периодических функций одной и нескольких переменных // Мат. заметки. — 1988. — **43**, №2. — С. 197 – 211.

12. *Галеев Э.М.* Приближение классов периодических функций нескольких переменных ядерными операторами // Мат. заметки. — 1990. — **47**, №3. — С. 32 – 41.
13. *Романюк А.С.* Поперечники и наилучшее приближение классов $B^{r}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных // Anal. Math. — 2011. — **37**, №3. — С. 181 – 213.
14. *Temlyakov V.N.* Approximation of periodic functions. — New York: Nova Sci. Publ. Inc., 1993. — 272 p.
15. *Стасюк С.А.* Наближення класів $B^{\omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних поліномами зі спектром в кубічних областях // Мат. студії — 2011. — **35**, №1. — С. 66 – 73.
16. *Романюк А.С., Романюк В.С.* Тригонометрические и ортопроекционные поперечники классов периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, №10. — С. 1348 – 1366.
17. *Федуник О.В.* Оцінки апроксимативних характеристик класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних в просторі L_q // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Збірник праць Ін-ту математики НАН України.— 2005. — **2**, №2. — С. 268 – 294.